数理解析研究所講究録
281巻 1976年 20-29

On Some Non-Coercive Boundary Value Problems

東工大 理　平良和昭

ここでは，Laplace作用素に対する種々の境界値問題のSpectrumの所在とResolventの評価について考察する．応用として，熱方程式に対する混合問題と波動方程式に対する（自己共役な）混合問題についてふれる．詳細は [16], [17], [18] に発表される予定である．

§0．記号

$\Omega = R^n$ の有界な領域，$\Gamma = \Omega$の滑らかな境界．$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$．$a$, b, c = Γ 上の滑らかな実数値函数；α, β, γ = Γ 上の滑らかな実ベクトル場；n = Γの外向き単位法線ベクトル．$H^s(\Omega) = \Omega$ 上の s 次の Sobolev空間，$\| \ \|_s = H^s(\Omega)$ の norm；$H^s(\Gamma) = \Gamma$ 上の s 次の Sobolev空間，$| \ |_s = H^s(\Gamma)$ の norm．

§ 1.　Laplace作用素に対する境界値問題

複素数λを含む次の問題を考える：

$$(*)\quad \begin{cases} (\lambda + \Delta)u = f & \text{in } \Omega, \\ \mathcal{B}u \equiv a\dfrac{\partial u}{\partial n} + (\alpha + i\beta)u + (b + ic)u\Big|_\Gamma = \phi & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

問題 (*) に付随して，$A : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ なる非有界作用素を

$$\mathcal{D}(A) = \{ u \in L^2(\Omega) ;\ \Delta u \in L^2(\Omega) \text{ and } \mathcal{B}u = 0 \},$$

$$Au = \Delta u, \quad u \in \mathcal{D}(A)$$

と定義する．

<u>例 1</u>（[2], §7）．$\beta \equiv 0$ とする．次の仮定をおく．

(A-1)　$\Gamma_0 = \{ x \in \Gamma ;\ a(x) = 0 \}$ は Γ の $(n-2)$ 次元 regular 部分多様体．

(B-1)　ベクトル場 α は Γ_0 に transversal．

(C-1)　$t = 0$ のとき $x_0 \in \Gamma_0$ を通る α の積分曲線に沿って，$a(x(t, x_0))$ は高々 $2k_0$ 次の偶数次の零点をもつ．

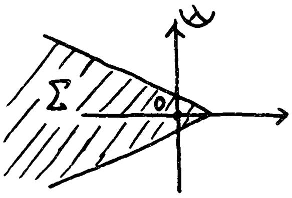
このとき

<u>定理 1-1</u>（[18], Theorem）．$\lambda = Re^{i\theta}$，$R \geq 0$，$0 < \theta < 2\pi$，$\delta_0 = \frac{1}{2k_0+1}$ とする．仮定 (A-1)，(B-1)，(C-1) が成立すれば，任意の整数 $s \geq 2$ に対して θ と s のみによる定数 $R_1(\theta) > 0$ が存在して，もし $|\lambda| = R \geq R_1(\theta)$ ならば任意の $f \in H^{s-2}(\Omega)$ と $\phi \in H^{s-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ に対して一意的な (*) の解 $u \in H^{s-1+\delta_0}(\Omega)$ が存在して，次の a priori 評価が成り立つ．

$$\|u\|^2_{s-1+\delta_0} + |\lambda|^{s-1+\delta_0}\|u\|^2_0 \leqq C_1\left(\|f\|^2_{s-2} + |\lambda|^{s-2}\|f\|^2_0 + |\varphi|^2_{s-3/2} + |\lambda|^{s-3/2}|\varphi|^2_0\right).$$

ここで，$C_1>0$ は θ と s のみによる定数∎

系 1-2（[10]，定理4.12）．$\mathcal{D}(A)\subset H^{1+\delta_0}(\Omega)$ であって，A の Resolvent $(\lambda-A)^{-1}$ が $\mathbb{C}\setminus\Sigma$（図参照）で存在し



$$\|(\lambda-A)^{-1}\| \leqq \frac{C_1}{|\lambda|^{\frac{1+\delta_0}{2}}}$$

なる評価をみたす∎

例 2（[3]）．$a\equiv 1$ とする．少し記号を導入する．

$T^*\Gamma$ = Γ の cotangent bundle，(x,ξ) = $T^*\Gamma$ の local coordinates．

$\alpha(x,\xi)$，$\beta(x,\xi)$ = それぞれベクトル場 $\alpha(x)/\sqrt{-1}$，$\beta(x)/\sqrt{-1}$ の symbol．

$\operatorname{div}\alpha(x)$ = ベクトル場 $\alpha(x)$ の発散．$M(x)$ = 超曲面 $\Gamma\subset R^n$ の平均曲率，$\omega_x(\ ,\ )$ = 超曲面 Γ の第２基本形式．

次の仮定をおく．

(A-2)　$|\beta(x)|\leqq 1$ on Γ．（$|\beta(x)|$ は接ベクトル $\beta(x)$ の長さ）

(B-2)　定数 $C_2>0$ が存在して

$$|\alpha(x,\xi)| \leqq C_2\left(|\xi|-\beta(x,\xi)\right) \quad \text{on } T^*\Gamma\setminus 0.$$

(C-2)　$|\beta(x)|=1$ なる $x\in\Gamma$ では，Γ の Riemann 計量による同一視によって $\beta(x)\in T_x\Gamma$ に対応する $\xi\in T_x^*\Gamma$ に対して

$$\widetilde{T_r}\, H_{|\xi|-\beta(x,\xi)}(x,\xi) + 2b(x) - \operatorname{div}\alpha(x) + \omega_x(\beta(x),\beta(x)) - (n-1)M(x) > 0.$$

ここで，$\widetilde{\mathrm{Tr}}\, H_{|\xi|-\beta(x,\xi)}(x,\xi)$ は $p(x,\xi)=|\xi|-\beta(x,\xi)$ ((A-2) によって $p\geqq 0$ on $T^*P\setminus 0$) の「Hessian」と Symplectic 構造によって表現した行列(+) の固有値（これは 0 か純虚数とその共役からなる）の $\sqrt{-1}$ 倍のうちの正のものの和（[13], §2）。

このとき

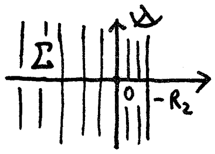
<u>定理 2-1</u>（[17], Theorem 3）．仮定 (A-2), (B-2), (C-2) が成立すれば，任意の整数 $s\geqq 2$ に対して（λ にも s にもよらない）定数 $R_2\leqq 0$ が存在して，もし $\mathrm{Re}\,\lambda<R_2$ ならば任意の $f\in H^{s-2}(\Omega)$ と $\varphi\in H^{s-3/2}(\Gamma)$ に対して一意的な (*) の解 $u\in H^{s-1}(\Omega)$ が存在する ∎

定理の証明は次の系を含んでいる．

<u>系 2-2</u>（[17], Corollary 1）．$\mathcal{D}(A)\subset H^1(\Omega)$ であって，

$$-\mathrm{Re}\,(Au,u)\geqq R_2\,\|u\|_0^2 \quad,\quad u\in\mathcal{D}(A).$$

従って，A の Resolvent $(\lambda-A)^{-1}$ が半平面 $\{\lambda\,;\,\mathrm{Re}\lambda>-R_2\}$ で存在し



$$\|(\lambda-A)^{-1}\|\leqq\frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda+R_2} \quad ∎$$

さらに

<u>系 2-3</u>（[17], Corollary 2）．A の共役 $A^*: L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ は次で与えられる．

$$\mathcal{D}(A^*)=\Big\{v\in H^1(\Omega)\,;\,\Delta v\in L^2(\Omega)\text{ and }\frac{\partial v}{\partial n}+(-\alpha+i\beta)v+(b-\mathrm{div}\,\alpha-ic+i\,\mathrm{div}\,\beta)v\Big|_\Gamma=0\Big\},$$

$$A^*v=\Delta v,\quad v\in\mathcal{D}(A^*) \ ∎$$

(+) [9] では基本行列，[4],[5] では Hamilton map とよばれている．

例 3 ([11]). $\alpha = a\gamma$, $\beta \equiv 0$ とする. 次を仮定する.

(A−3) $a(x) \geqq 0$ on Γ.

(B−3) $b(x) > 0$ on $\Gamma_0 = \{ x \in \Gamma \ ; \ a(x) = 0 \}$.

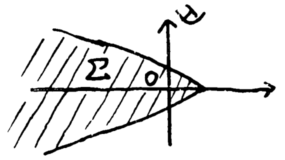
このとき

定理 3-1 ([16], Theorem 1). $\lambda = Re^{i\theta}$, $R \geqq 0$, $0 < \theta < 2\pi$ とする. 仮定 (A−3), (B−3) が成立すれば, 任意の整数 $s \geqq 2$ に対して θ と s のみによる定数 $R_3(\theta) > 0$ が存在して, もし $|\lambda| = R \geqq R_3(\theta)$ ならば任意の $f \in H^{s-2}(\Omega)$ と $\phi \in H^{s-1/2}(\Gamma)$ に対して一意的な (*) の解 $u \in H^s(\Omega)$ が存在して, 次の a priori 評価が成り立つ.

$$\|u\|_s^2 + |\lambda|^s \|u\|_0^2 \leqq C_3 \left(\|f\|_{s-2}^2 + |\lambda|^{s-2} \|f\|_0^2 + |\phi|_{s-1/2}^2 + |\lambda|^{s-1/2} |\phi|_0^2 \right).$$

ここで, $C_3 > 0$ は θ と s のみによる定数 ▮

系 3-2 ([16], Theorem 2). $\mathcal{D}(A) \subset H^2(\Omega)$ であって, A の Resolvent $(\lambda - A)^{-1}$ が $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ で存在し



$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leqq \frac{C_3}{|\lambda|} \quad ▮$$

系 3-3 ([16], Corollary). 次を仮定する.

(C−3) $\operatorname{div} \gamma(x) \equiv 0$ on Γ.

このとき A の共役 $A^* : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は次で与えられる.

$$\mathcal{D}(A^*) = \left\{ v \in H^2(\Omega) \ ; \ a\left(\frac{\partial v}{\partial n} - \gamma v\right) + (b - ic)v\Big|_\Gamma = 0 \right\},$$

$$A^* v = \Delta v, \quad v \in \mathcal{D}(A^*) \quad ▮$$

§2. 熱方程式に対する混合問題

次の問題を考える：

$$(**)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u = f & \text{in } \Omega \times (0,T),\ (T>0) \\ u|_{t=0} = u_0, & \\ \mathcal{B} u \equiv a \frac{\partial u}{\partial n} + (\alpha + i\beta) u + (b+ic) u = 0 & \text{on } \Gamma \times (0,T). \end{cases}$$

以下 $I \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{E}_t^j(I\,;X) = \{I \text{ 上の } X\text{-値 } j \text{ 回連続的微分可能函数}\}$$

を表わす.（X は Banach 空間）

例 1　$\beta \equiv 0$ とする. 系 1-2 と Krein [12] の定理 6.8 より

定理 1-3　(A-1), (B-1), (C-1) を仮定する. もし $f(x,t) \in \mathcal{E}_t^0([0,T]\,;L^2(\Omega))$ であって $Af(x,t) \in \mathcal{E}_t^0([0,T]\,;L^2(\Omega))$ ならば, 任意の $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ に対して一意的な (**) の解 $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^1((0,T]\,;L^2(\Omega)) \cap \mathcal{E}_t^0((0,T]\,;H^{1+\delta_0}(\Omega)) \cap \mathcal{E}_t^0([0,T]\,;L^2(\Omega))$ が存在する ∎

例 2　$a \equiv 1$ とする. 系 2-2 と溝畑 [15] の定理 5.6 より

定理 2-4　(A-2), (B-2), (C-2) を仮定する. もし $f(x,t) \in \mathcal{E}_t^0([0,T]\,;L^2(\Omega))$ であって $Af(x,t) \in \mathcal{E}_t^0([0,T]\,;L^2(\Omega))$ ならば, 任意の $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ に対して一意的な (**) の解 $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^1([0,T]\,;L^2(\Omega)) \cap \mathcal{E}_t^0([0,T]\,;H^1(\Omega))$ が存在する ∎

例 3　$\alpha = a\gamma$, $\beta \equiv 0$ とする. 系 3-2 と溝畑 [15] の定理 5.8 より

定理 3-4 (cf. [16], Theorem 3). (A-3), (B-3) を仮定する.

もし 定数 $C_4 > 0$ が存在して

$$\| f(x,t) - f(x,t') \|_0 \leqq C_4 \, |t - t'|^{\varepsilon} \quad (0 < \varepsilon \leqq 1)$$

ならば，任意の $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ に対して一意的な (＊＊) の解 $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^1([0,T]\,;\,L^2(\Omega)) \cap \mathcal{E}_t^0([0,T]\,;\,H^2(\Omega))$ が存在する ∎

§3. 波動方程式に対する混合問題

次の問題を考える：

$$(＊＊＊)\ \begin{cases} \square u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) u = f & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u|_{t=0} = u_0 \,;\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1\,, & \\ \mathcal{B} u \equiv a \frac{\partial u}{\partial n} + (\alpha + i\beta) u + (b + ic) u = 0 & \text{on } \Gamma \times (0,T). \end{cases}$$

以下では例2と例3の自己共役になる場合を考察する．

<u>例 2′</u> $a \equiv 1$，$\alpha \equiv 0$ とする．次を仮定する．

(A-2) $|\beta(x)| \leqq 1$ on Γ.

(C-2)′ $|\beta(x)| = 1$ なる $x \in \Gamma$ では，Γ の Riemann 計量による同一視によって $\beta(x) \in T_x\Gamma$ に対応する $\xi \in T_x^*\Gamma$ に対して

$$\widetilde{\mathrm{Tr}}\, H_{|\xi| - \beta(x,\xi)}(x,\xi) + 2b(x) + \omega_x(\beta(x), \beta(x)) - (n-1) M(x) > 0.$$

(D-2) $c(x) = \frac{1}{2} \operatorname{div} \beta(x)$ on Γ.

このとき系 2-2 と系 2-3 より $A : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ は上に有界な自己共役作用素である．$-A > 0$ としてよい．

$$B = \sqrt{-1}\,(-A)^{1/2}$$

とおく．($B^2 = A$) よく知られた推論により (cf. [6])

定理2-5　(A-2), (C-2)$'$, (D-2) を仮定する．このとき

1° (Energy 不等式)　$u(x,t) \in \mathcal{E}_t^0([0,T];\mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{E}_t^1([0,T];\mathcal{D}(B)) \cap \mathcal{E}_t^2([0,T];L^2(\Omega))$ に対して

$$\|u(t)\|_0 + \|Bu(t)\|_0 + \|u'(t)\|_0$$
$$\leqq C_5\left[\|u(0)\|_0 + \|Bu(0)\| + \|u'(0)\|_0 + \int_0^t \|\Box u(s)\|_0\, ds\right].$$

ここで，$C_5 > 0$ は T のみによる定数．

2° (存在定理)　任意の $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, $u_1 \in \mathcal{D}(B)$, $f(x,t) \in \mathcal{E}_t^1([0,T];L^2(\Omega))$ に対して一意的な (***) の解 $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^0([0,T];\mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{E}_t^1([0,T];\mathcal{D}(B)) \cap \mathcal{E}_t^2([0,T];L^2(\Omega))$ が存在して次の Energy 不等式が成りたつ．

$$\|u(t)\|_0 + \|Au(t)\|_0 + \|u'(t)\|_0 + \|Bu'(t)\|_0 + \|u''(t)\|_0$$
$$\leqq C_6\left[\|u(0)\|_0 + \|Au(0)\|_0 + \|u'(0)\|_0 + \|Bu'(0)\|_0 + \|f(0)\|_0 + \int_0^t \|f'(s)\|_0\, ds\right].$$

ここで，$C_6 > 0$ は T のみによる定数 ∎

注意2-6　$|\beta(x)| < 1$ on Γ の場合は，Agemi [1], Miyatake [14] の研究がある．

例3$'$ ([7], [8])　$\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 0$, $c \equiv 0$ とする．(A-3), (B-3) を仮定する．このとき定理3-1と系3-3より $A: L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は上に有界な自己共役作用素である．従って例2$'$と同様に

定理3-5　(A-3), (B-3) を仮定する．このとき

1° (Energy 不等式)　$u(x,t) \in \mathcal{E}_t^0([0,T];\mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{E}_t^1([0,T];\mathcal{D}(B)) \cap \mathcal{E}_t^2([0,T];L^2(\Omega))$ に対して

$$\|u(t)\|_0 + \|Bu(t)\|_0 + \|u'(t)\|_0$$
$$\leqq C_7 \left[\|u(0)\|_0 + \|Bu(0)\|_0 + \|u'(0)\|_0 + \int_0^t \|\square u(s)\|_0\, ds\right].$$

ここで，$C_7 > 0$ は T のみによる定数．

2°（存在定理） 任意の $u_0 \in \mathcal{D}(A)$，$u_1 \in \mathcal{D}(B)$，$f(x,t) \in \mathcal{E}_t^1([0,T]; L^2(\Omega))$ に対して一意的な (***) の解 $u(x,t) \in \mathcal{E}_t^0([0,T]; \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{E}_t^1([0,T]; \mathcal{D}(B)) \cap \mathcal{E}_t^2([0,T]; L^2(\Omega))$ が存在して次の Energy 不等式が成り立つ．

$$\|u(t)\|_2 + \|u'(t)\|_0 + \|Bu'(t)\|_0 + \|u''(t)\|_0$$
$$\leqq C_8 \left[\|u(0)\|_2 + \|u'(0)\|_0 + \|Bu'(0)\|_0 + \|f(0)\|_0 + \int_0^t \|f'(s)\|_0\, ds\right].$$

ここで，$C_8 > 0$ は T のみによる定数 ∎

注意 3-6 $b = 1 - a \geqq 0$ on Γ の場合は，$\mathcal{D}(B)$ を具体的に記述することができる（[7]）．

References

[1] Agemi, R.: Remarks on L^2-well-posed mixed problems for hyperbolic equations of second order, Hokkaido Math. J., II (1973), 214-230.

[2] Egorov, Ju.V., and V.A. Kondrat'ev: The oblique derivative problem, Math. USSR Sb., 7 (1969), 139-169.

[3] Fujiwara, D., and K. Uchiyama: On some dissipative boundary value problems for the Laplacian, J. Math. Soc. Japan, 27 (1971), 625-635.

[4] Hörmander, L.: On the Cauchy problem for differential equations

with double characteristics (to appear).

[5] Hörmander, L.: A class of hypoelliptic pseudodifferential operators with double characteristics (to appear).

[6] Ikawa, M.: Mixed problems for hyperbolic equations of second order, J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 580-608.

[7] Inoue, A.: On a mixed problem for □ with discontinuous boundary condition (I), J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 21 (1974), 85-92.

[8] 伊藤清三　偏微分方程式　培風館 (1966).

[9] Ivrii, V.Ia., and V.M. Petkov: Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations, Usp. Mat. Nauk, 19 (1974), 3-70.

[10] 鍛治明　Non-coercive 境界値問題について, 東京大学修士論文 (1973).

[11] Kaji, A.: On the degenerate oblique derivative problems, Proc. Japan Acad., 50 (1974), 1-5.

[12] Krein, S.G.: Banach 空間における線型微分方程式 (牛島・辻岡訳) 吉岡書店 (1972).

[13] Melin, L.: Lower bounds for pseudo-differential operators, Ark. för Mat., 9 (1971), 117-140.

[14] Miyatake, S.: Mixed problems for hyperbolic equations of second order with first order complex boundary operators, Japan. J. Math., 1 (1975), 111-158.

[15] 溝畑茂　偏微分方程式論　岩波書店 (1965).

[16] Taira, K.: On some degenerate oblique derivative problems (to appear).

[17] ———: On some non-coercive boundary value problems for the Laplacian (to appear).

[18] ———: On a degenerate oblique derivative problem with a complex parameter (to appear).